

1 : Algèbre - Simplification fractions

mercredi, 3 janvier 2024 13:03



TESTS____MP1

Nom:

Prénom:

Mathématiques — MP1, classe 358613, 2023–2024

Évaluation : Fractions rationnelles

Lundi 08 janvier 2024

Exercice	1	2	3	Total
Points	5	16.5	14.5	36
Obtenus				

Note

Consignes

- Temps à disposition : 60 minutes.
- Sans calculatrice et sans formulaire.
- Toutes les solutions et les développements sont à écrire sur les feuilles distribuées.
- **Chacune de vos réponses doit être justifiée ou accompagnée de son développement. Sinon des points peuvent être retirés.**
- Bon travail !

Exercice 1 (/ 5 pts)

Soient :

$$A = 16(x+1)^2 - 9$$

$$B = (4x+1)(2x-1) + 4x+1$$

a) Factoriser A au maximum. (Indice : ne pas effectuer en premier !)

(1.5 pts)

$$\begin{aligned} (4(x+1))^2 - 3^2 &= (\cancel{4}(x+1) + 3)(4(x+1) - 3) \\ &= (4x + 4 + 3)(4x + 4 - 3) \\ &= \boxed{(4x+7)(4x+1)} \end{aligned}$$

b) Factoriser B au maximum. (Indice : ne pas effectuer en premier !)

(1.5 pt)

$$\begin{aligned} (4x+1)(2x-1) + (4x+1) \\ &= (4x+1)((2x-1)+1) \\ &= \boxed{(4x+1)(2x)} \end{aligned}$$

c) Déterminer le PPCM de A et B .

(1 pt)

$$(4x+1)(4x+7)(2x)$$

d) Simplifier $\frac{B}{A}$ au maximum.

(1 pt)

$$\frac{(4x+1)2x}{(4x+7)(4x+1)} = \frac{2x}{4x+7}$$

Exercice 2 (/ 16.5 pts)

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\text{a) } \frac{16x^4y^3}{12xy^2z} = \boxed{\frac{4x}{3y^2}}$$

(1 pt)

$$\text{b) } \frac{a^2 - 49}{a} \cdot \frac{1}{a+7} \cdot \frac{a}{a-7}$$

(1.5 pt)

$$= \frac{(a+7)(a-7)}{a} \cdot \frac{1}{a+7} \cdot \frac{a}{a-7}$$

$$= \frac{\cancel{(a+7)} \cancel{(a-7)} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{(a+7)} \cdot \cancel{(a-7)}} = \boxed{1}$$

c) $\frac{6a^2b - 6ab}{12b - 12a^2b}$

(2 pts)

$$= \frac{6ab(a-1)}{12b(1-a^2)} = \frac{6ab(a-1)}{12b(1+a)(1-a)}$$

$$= \frac{\cancel{6ab}(1-a)}{\cancel{12b}(1+a)(1-a)} = \boxed{\frac{-a}{2(1+a)}}$$

d) $\frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^4 - y^4}$

(2.5 pts)

$$= \frac{x^2(x-y) + y^2(x-y)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(x-y)}{\cancel{(x^2+y^2)}(x+y)(x-y)} = \boxed{\frac{1}{x+y}}$$

e) $\frac{x^2 - 2xy + y^2 - 1}{4x - 4y + 4}$

(2 pts)

$$= \frac{(x-y)^2 - 1}{4(x-y+1)} = \frac{\cancel{(x-y+1)}(x-y-1)}{4 \cancel{(x-y+1)}}$$

$$= \boxed{\frac{x-y-1}{4}}$$

f) $\frac{x+1}{x^2 - 16x + 60} \div \frac{2x+2}{x^2 - 36}$

(2.5 pts)

$$= \frac{x+1}{(x-10)(x-6)} \cdot \frac{(x+6)(x-6)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}(x+6)\cancel{(x-6)}}{(x-10)\cancel{(x-6)}2\cancel{(x+1)}} = \boxed{\frac{x+6}{2(x-10)}}$$

g) $\frac{ba^2 - b^3}{ab + b^2} \div \frac{a - b}{b^2}$

(2 pts)

$$= \frac{b(a^2 - b^2)}{b(a + b)} \cdot \frac{b^2}{a - b}$$

$$= \frac{\cancel{b}(\cancel{a+b})(\cancel{a-b}) \cdot b^2}{\cancel{b}(\cancel{a+b}) \cdot (\cancel{a-b})} = \boxed{b^2}$$

h) $\frac{a^2 + 4a + 4}{3t - 3} \cdot \frac{9 - 9t}{2a^2 + 5a + 2}$

$$\begin{matrix} m \cdot n = 4 \\ m + n = 5 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} m \cdot n = 4 \\ m + n = 5 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} m = 1 \\ n = 4 \end{matrix}$$

(3 pts)

$$\begin{aligned} 2a^2 + a + 4a + 2 \\ = a(2a + 1) + 2(2a + 1) \\ = (2a + 1)(a + 2) \end{aligned}$$

$$= \frac{(a + 2)^2}{3(t - 1)} \cdot \frac{9(t - 1)}{(2a + 1)(a + 2)}$$

$$= \frac{(a + 2)^{\cancel{2}} \overset{3}{9}(\cancel{t - 1})}{\cancel{3}(\cancel{t - 1})(2a + 1)\cancel{(a + 2)}}$$

$$= \frac{(a + 2) \overset{3}{3}(\cancel{t - 1})}{(\cancel{t - 1})(2a + 1)}$$

$$= \boxed{\frac{3(a + 2)}{2a + 1}}$$

Exercice 3 (/ 14.5 pts)

Effectuer les opérations suivantes et simplifier au maximum :

a) $\frac{b+a}{3a^2} - \frac{2b-1}{6ab}$ PPMC : $6a^2b$ (2 pts)

$$= \frac{(b+a) \cdot 2b}{6a^2b} - \frac{(2b-1) \cdot a}{6a^2b}$$

$$= \frac{2b^2 + 2ab - 2ab + a}{6a^2b}$$

$$= \boxed{\frac{2b^2 + a}{6a^2b}}$$

b) $\frac{1}{x} + 1 + \frac{2x}{1+x} - 2$ PPMC : $x(1+x)$ (3 pts)

$$\frac{1 \cdot (1+x)}{x(1+x)} + \frac{1 \cdot x(1+x)}{x(1+x)} + \frac{2x \cdot x}{x(1+x)} - \frac{2 \cdot x(1+x)}{x(1+x)}$$

$$= \frac{1+x + x + x^2 + 2x^2 - 2x - 2x^2}{x(1+x)}$$

$$= \boxed{\frac{x^2 + 1}{x(1+x)}}$$

$$c) \frac{4st}{s^2 - t^2} + \frac{s-t}{s+t} - \frac{s+t}{s-t}$$

(3 pts)

$$= \frac{4st}{(s+t)(s-t)} + \frac{s-t}{s+t} - \frac{s+t}{s-t} \quad \text{PPMC: } (s+t)(s-t)$$

$$= \frac{4st}{(s+t)(s-t)} + \frac{(s-t) \cdot (s-t)}{(s+t)(s-t)} - \frac{(s+t) \cdot (s+t)}{(s+t)(s-t)}$$

$$= \frac{4st + (s^2 - 2st + t^2) - (s^2 + 2st + t^2)}{(s+t)(s-t)}$$

$$= \boxed{0}$$

$$d) \frac{3a}{3a-2b} \cdot \frac{3a}{2b} - \left(\frac{2a}{3a-2b} + \frac{3a}{2b} \right)$$

(3 pts)

$$= \frac{3a \cdot 3a}{(3a-2b)2b} - \frac{2a}{3a-2b} - \frac{3a}{2b} \quad \text{PPMC: } (3a-2b) \cdot 2b$$

$$= \frac{9a^2}{(3a-2b)2b} - \frac{2a \cdot 2b}{(3a-2b)2b} - \frac{3a \cdot (3a-2b)}{(3a-2b)2b}$$

$$= \frac{9a^2 - 4ab - 9a^2 + 6ab}{(3a-2b)2b}$$

$$= \frac{2ab}{(3a-2b)2b} = \boxed{\frac{a}{3a-2b}}$$

$$\text{e) } \frac{\frac{w+8}{w^2+w-6}}{\frac{w}{w+3} - \frac{2w}{w-2}}$$

(3.5 pts)

PPMC: $(w+3)(w-2)$

$$= \frac{w+8}{w^2+w-6} \div \left(\frac{w}{w+3} - \frac{2w}{w-2} \right)$$

$$= \frac{w+8}{(w-2)(w+3)} \div \left(\frac{w \cdot (w-2)}{(w+3)(w-2)} - \frac{2w \cdot (w+3)}{(w+3)(w-2)} \right)$$

$$= \frac{w+8}{(w-2)(w+3)} \div \frac{w^2-2w-2w^2-6w}{(w+3)(w-2)}$$

$$= \frac{w+8}{(w-2)(w+3)} \div \frac{-w^2-8w}{(w+3)(w-2)}$$

$$= \frac{w+8}{(w-2)(w+3)} \cdot \frac{(w+3)(w-2)}{-w(w+8)}$$

$$= \frac{\cancel{(w+8)} \cancel{(w+3)} \cancel{(w-2)}}{\cancel{(w-2)} \cancel{(w+3)} (-w) \cancel{(w+8)}} = \boxed{-\frac{1}{w}}$$