

Nom: Corrigé
Prénom:



ÉCOLE DES MÉTIERS FRIBOURG
BERUFSFACHSCHULE FREIBURG
MATURITÉ | MATURITÄT

Mathématiques — MP1 358611 — 2024–2025

Équations rationnelles, systèmes d'équations et Problèmes

Mardi 01 avril 2025

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	1 <u>3p</u>	7.5	2	<u>3</u>	5	5	4	40
Obtenus								

Note

Consignes

- Temps à disposition : 70 minutes.
- exercices 1 et 2 : sans calculatrice et sans formulaire (~ 30 minutes);
- exercice 3 à 7 : avec calculatrice sans formulaire (~ 40 minutes).
- Toutes les solutions et les développements sont à écrire sur les feuilles distribuées.
- Chacune de vos réponses doit être justifiée ou accompagnée de son développement. Sinon des points peuvent être retirés.
- Bon travail !

Exercice 1 (/ 13.5 pts)

Résoudre les équations rationnelles suivantes en n'oubliant pas de donner le domaine de définition et l'ensemble de solutions $S = \{...\}$:

a) $\frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{3-x}$

(2 pts)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ 0,5

$\frac{x-2}{x-3} = -\frac{2}{x-3} \quad | \cdot x-3$ 0,5

$x-2 = -2$ 0,25

$x = 0 \in \mathbb{D}$ 0,125 + 0,125

$S = \{0\}$ 0,125

$(x-2)(3-x) = 2(x-3)$ 0,25
 $3x - x^2 - 6 + 2x = 2x - 6$ 0,25

$x(3-x) = 0$ 0,125

$x_1 = 0 \in \mathbb{D}$ 0,5

$x_2 = 3 \notin \mathbb{D}$ 0,5

$S = \{0\}$ 0,125
2

b) $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x+3}$

(2 pts)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$

$(x+2)(x+3)$ 0,5

$x+3 = 3(x+2)$ 0,5

$x+3 = 3x+6 \quad | -x-6$ 0,125

$-3 = 2x \quad | :2$

$x = -\frac{3}{2} \in \mathbb{D}$ 0,125 + 0,125

$S = \{-\frac{3}{2}\}$ 0,125

2

$$c) \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$$

(2pts)

$$(x+1)(x-1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$\frac{x(x-1) + 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x-1)} \quad \left| \begin{array}{l} (x+1) \\ (x-1) \end{array} \right.$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x} + 2\cancel{x} + 2 = \cancel{x^2} + 2\cancel{x} + 3$$

$$-x + 2 = 3 \quad | +x - 3$$

$$x = -1 \notin D$$

$$S = \emptyset$$

0,125

2,5

$$d) \frac{-x}{x-3} - \frac{x+2}{x^2-3x} = \frac{-2}{3x-9} - \frac{1}{x}$$

$$x(x-3) \quad x(x-3)$$

$$\text{PPMC } 3x(x-3)$$

(3pts)

$$\frac{x \cdot x - 3(x+2)}{3x(x-3)} = \frac{-2x - 3(x-3)}{3x(x-3)}$$

$$x^2 - 3x - 6 = -2x - 3x + 9 \quad | +4x - 9$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$$

$$x(x+5) - 3(x+5) = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x_1 = 3 \notin D$$

$$x_2 = -5 \in D$$

$$S = \{-5\}$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$+ \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \notin D$$

$$- \rightarrow -\frac{10}{2} = -5 \in D$$

$$S = \{-5\}$$

e) $\frac{5x - 36}{x^2 + 2x - 15} + \frac{x - 1}{x + 5} = 3$

$x^2 + 5x - 3x - 15$
 $x(x+5) - 3(x+5)$
 $(x+5)(x-3)$

ppmc $(x+5)(x-3)$ 0,25 (3.5 pts)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}$ 0,5

$\frac{5x - 36}{(x+5)(x-3)} + \frac{(x-1)(x-3)}{(x+5)(x-3)} = \frac{3(x^2 + 2x - 15)}{(x+5)(x-3)}$ 0,25

$5x - 36 + x^2 - 3x - x + 3 = 3x^2 + 6x - 45$ 0,5

$0 = 2x^2 + 5x - 12$ 0,25 $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)$

$0 = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 25 + 96$

$0 = 2x(x+4) - 3(x+4) = 121 = 11^2$ 0,25

$0 = (x+4)(2x-3)$ 0,5 $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 11}{4}$

$x_1 = -4 \in \mathbb{D}$ 0,25
 $x_2 = 3/2 \in \mathbb{D}$ 0,25

$S = \{-4, 3/2\}$ 0,25

$+ \frac{6}{4} = 3/2$
 $- \frac{16}{4} = -4$
 $S = \{-4, 3/2\}$ 0,25

13pts

Exercice 2 (/ 7.5 pts)

Résoudre les systèmes d'équations suivants et donner l'ensemble de solutions $S = \{ \dots \}$

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

(2.5 pts)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x - 2y = 7 & \cdot 2 \\ 2x - 5y = 1 & \cdot 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 6x - 15y = 3 \end{cases} \\ & \hline & 0 + 11y = 11 \\ & y = 1 \\ & \hookrightarrow (1) \quad 3x - 2 \cdot 1 = 7 \\ & \quad 3x = 9 \\ & \quad x = 3 \\ & S = \{(3, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x &= \frac{1+5y}{2} \\ \hookrightarrow (1) \quad 3\left(\frac{1+5y}{2}\right) - 2y &= 7 \\ \frac{3+15y}{2} - 2y &= 7 \\ 3+15y-4y &= 14 \\ 3+11y &= 14 \\ 11y &= 11 \\ y &= 1 \\ \hookrightarrow (2) \quad x &= \frac{1+5 \cdot 1}{2} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \\ S &= \{(3, 1)\} \end{aligned}$$

2.5

(5 pts)

$$\text{b) } \begin{cases} -x + y - z = 20 \\ 2x + y + z = -6 \\ x - 3y + 7z = -16 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} 0,15 & 0,25 \\ \hline \cdot 2 & 1 \\ \cdot 1 & \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x + 2y - 2z & = & 40 \quad 0,125 \\ 2x + y + z & = & -6 \quad 0,125 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{3y - z = 34} \quad 0,125$$

$$\begin{array}{rcl} -x + y - z & = & 20 \quad 0,125 \\ x - 3y + 7z & = & -16 \quad 0,125 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{-2y + 6z = 4} \quad 0,125$$

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow 3y - z & = & 34 \\ \rightarrow -2y + 6z & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \cdot 6 & \\ \hline 1 & \end{array} \quad 0,125$$

$$\begin{array}{rcl} 18y - 6z & = & 204 \quad 0,125 \\ -2y + 6z & = & 4 \quad 0,125 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 16y & = & 208 \quad 0,125 \end{array}$$

$$y = \frac{208}{16} = \frac{104}{8} = \frac{52}{4} = \frac{26}{2} = 13 \quad 0,125$$

$$\rightarrow -2 \cdot 13 + 6z = 4 \quad 0,125$$

$$6z = 4 + 26 = 30 \quad 0,125$$

$$z = 5 \quad 0,125$$

$$\rightarrow -x + 13 - 5 = 20 \quad 0,125$$

$$-x = 12 \quad 0,125$$

$$x = -12 \quad 0,125 \quad S = \{(-12; 13; 5)\} \quad 0,125$$

5

75

Nom:

Prénom:



ÉCOLE DES MÉTIERS FRIBOURG
BERUFSFACHSCHULE FREIBURG
MATURITÉ | MATURITÄT

Deuxième partie (avec calculatrice)

Exercice 3 (/ 2 pts)

Résoudre grâce à la calculatrice, en donnant l'ensemble de solutions $S = \{\dots\}$:

a) $\frac{x}{x-2} + 1 = \frac{2}{x-2} - \frac{2-x}{x-2}$

(1 pt)

$$S = \emptyset$$

1

b)
$$\begin{cases} 0.2y + z = 0.37 \\ 0.56y - z = -0.12 \\ 3x - 3y + 3.1z = -0.56 \end{cases}$$

(1 pt)

$$S = \{(-0,172070175439; 0,328947368421; 0,304210526316)\}$$

1

Consignes et indications

- La calculatrice sert uniquement à faire de petits calculs et à vérifier les solutions. Le développement et le détail de la résolution doivent être écrits.
- n'oublier pas de définir les inconnues au début, donner la ou les équations et une phrase réponse à la fin.

Exercice 4 (/3 pts)

Un commerçant veut écouler 100 chemises démodées. Il réussit à en vendre 43 au prix initial.

Il consent alors un rabais de 1 Frs par chemise et en vend ainsi 17.

Il liquide le reste à 1.5 Frs l'unité.

Calculer le prix initial d'une chemise, sachant qu'il a encaissé en tout 1 243 Frs.

$x =$ le prix initial d'une chemise 0,25

$$43 \cdot x + 17(x-1) + (100-43-17) \cdot 1.5 = 1243 \quad 0,25$$

$$43x + 17x - 17 + 40 \cdot 1.5 = 1243 \quad 0,5$$

$$60x - 17 + 60 = 1243 \quad 0,25$$

$$60x = 1200 \quad 0,25$$

$$x = 20 \quad 0,25$$

$$S = \{20\} \quad 0,25$$

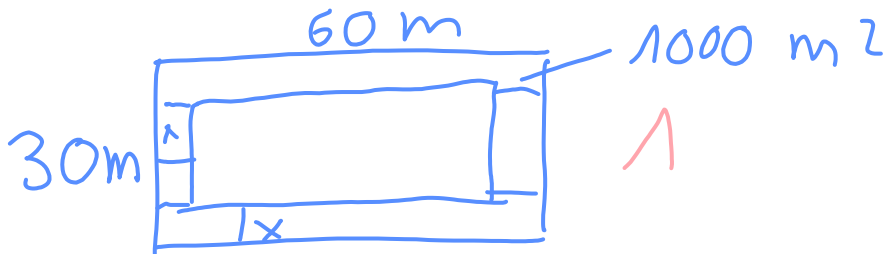
Le prix initial est de 20 Frs. 0,25

Exercice 5 (/ 5 pts)

Une commune fribourgeoise décide de construire une nouvelle patinoire de 30 m par 60 m. Pour des questions d'argent, il a été décidé de réduire l'aire totale de la patinoire de 1000 m². La surface perdue est alors remplacée par un trottoir uniforme tout autour de la patinoire.

Dessiner un croquis de la situation avec les différentes mesures.

Calculer la largeur de ce trottoir.



Autre éq

$$30 \cdot 60 - 1000 = (60 - 2x)(30 - 2x)$$

x = largeur du trottoir

$$2 \cdot x \cdot (30 - 2x) + 2 \cdot 60 \cdot x = 1000$$

$$60x - 4x^2 + 120x = 1000$$

$$0 = 4x^2 - 180x + 1000 \quad | \div 4$$

$$0 = x^2 - 45x + 250$$

$$\Delta = (-45)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (250) = 1025$$

$$x_{1,2} = \frac{45 \pm \sqrt{1025}}{2}$$

38,5
6,5

$$S = \{6,5; 38,5\}$$

pas possible

La largeur est de 6.5 m

5 pts

Exercice 6 (/ 5 pts)

On aimerait changer l'eau de notre aquarium de 120 l. Combien d'eau "sale" doit-on remplacer par de l'eau pure, sachant que l'eau "sale" contient 11% de saleté et qu'on aimerait un aquarium avec 3% de saleté seulement ?

$$\boxed{11\%} + \boxed{0\%} = \boxed{3\%}$$

$x \text{ l} \qquad 120 - x \text{ l} \qquad 120 \text{ l}$

nombre
de ligne
restant
0,25

$$x \cdot 11\% + (120 - x) \cdot 0\% = 120 \cdot 3\%$$

$$x \cdot 11\% = 120 \cdot 3\%$$

$$11x = 360$$

$$x = 32,72$$

$$\rightarrow 120 - x = 120 - 32,72 = 87,28$$

On doit remplacer 87 l. 0,25 5pts

$$\begin{cases} x + y = 120 \end{cases} \quad y = \text{l à remplacer} \quad 0,5$$

$$\begin{cases} x \cdot 11\% + y \cdot 0\% = 120 \cdot 3\% \end{cases} \quad 0,75$$

$$y = 120 - x$$

Exercice 7 (/ 4 pts)

Deux nombres ont une différence de 20. Si le plus grand est divisé par le plus petit, le quotient est 2 et le reste est 5. Trouver ces deux nombres.

$X = 1^{\text{er}}$ nombre (plus grand) 0,25
 $y = 2^{\text{em}}$ nombre 0,25

$$\begin{cases} X - y = 20 & (1) \quad 0,5 \\ \frac{X}{y} = 2 + \frac{5}{y} & (2) \quad 0,75 \end{cases}$$

(1) $X = 20 + y$ 0,25

$\hookrightarrow (2) \frac{20+y}{y} = 2 + \frac{5}{y}$ 0,25

$$20 + y = 2y + 5 \quad 0,5$$

$$15 = y \quad 0,25$$

$\hookrightarrow (1) X = 20 + 15 = 35$ 0,5
 $S = \{(35; 15)\}$ 0,25

Les deux nombres sont 15 et 35 0,25

4pts